المملكة العربية السعودية

المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

الرياضيات التمهيدية

أساسيات الجبر

1

الجدارة: القدرة على إجراء العمليات الرياضية بدقة و سرعة.

الأهداف: في نهاية هذه الوحدة يجب على المتدرب أن يكون قادراً على:

1 ـ تعريف الأعداد الحقيقية.
2 ـ إجراء العمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة.
3 ـ التعامل مع الكسور (جمعاً و طرحاً وضرباً و قسمة).
4 ـ معرفة الأسس و قوانينها.
5 ـ معرفة الجذور و التعامل معها.
6 -إيجاد النسبة المئوية.
7 - إجراء العمليات الحسابية على كثيرات الحدود.

مستوى الأداء المطلوب: يجب أن لا تقل نسبة الإتقان لهذه الجدارة عن 95 ٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: 30 ساعة.

متطلبات الجدارة: طالما أنه لا يوجد شيء قبل هذه المهارة يجب التدريب على جميع المهارات لأول مرة.

(1 – 1) الأعداد الحقيقية :

تعتبر الأعداد أساس الرياضيات، وأغلب الأعداد المستخدمة في الرياضيات هي الأعداد الحقيقية، وتحتوي منظومة الأعداد الحقيقية على الآتي:

- الأعداد الطبيعية Natural Number ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

وتستخدم في العد، وإذا جمع أو ضرب اثنين من هذه الأعداد فالنتيجة دائماً عدد طبيعي.

- الأعداد الصحيحة Integer Numbers ($\mathbb{Z}$)

وتشمل الأعداد الطبيعية مضافاً إليها الصفر ، والأعداد الطبيعية مسبوقة بإشارة السالب.

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$$

- الأعداد النسبية Rational Numbers ($\mathbb{Q}$)

وهي الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام وكلاهما عدد صحيح ،والمقام لا يساوي الصفر مثل $\frac{2}{3}$ و $\frac{18}{5}$ ....

- الأعداد غير النسبية Irrational Numbers ($\mathbb{I}$)

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام وكلاهما عدد صحيح مثل $\sqrt{2}$ و π....

الشكل التالي يوضح العلاقة بين هذه المجموعات المختلفة:

الأعداد غير النسبية

$-\sqrt{8}$

$\sqrt{15}$

π

$\dfrac{\pi}{3}$

الأعداد النسبية

$\dfrac{4}{9} \quad \dfrac{-5}{8} \quad \dfrac{11}{4}$

الأعداد الصحيحة

0 -6 -4

الأعداد الطبيعية

1 2
14 50

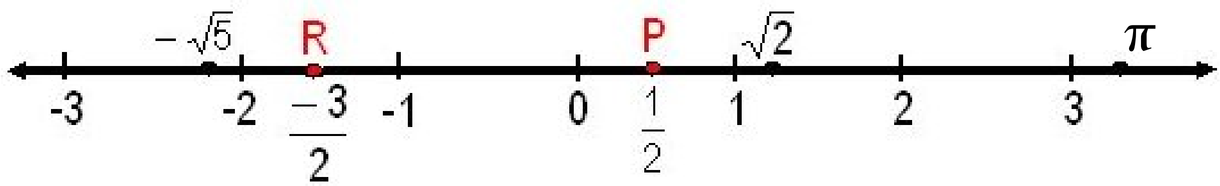
شكل (1 -1)

وفي مجموعة الأعداد الحقيقية نلاحظ أن:

مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي، وطرح أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي وضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي وكذلك قسمة أي عدد حقيقي على آخر لا يساوي صفراً هو عدد حقيقي.

التمثيل البياني للأعداد الحقيقية:

من المفيد عادة تمثيل الأعداد الحقيقية كنقط على خط ، ولإجراء ذلك نختار نقطه على الخط لتمثيل العدد الحقيقي صفر(0) ونطلق على هذه النقطة نقطة الأصل ونرمز لها بالرمز (O) ، تتصل الأعداد الحقيقية الموجبة +1 ، +2 ، +3 ، ...... بالنقط على الخط على بعد 1 ، 2 ، 3 ، ...... من الوحدات على الترتيب يمين نقطة الأصل (انظر الشكل 1 -2) في حين أن الأعداد الحقيقية السالبة -1 ، -2 ، -3 ، ...... تتصل بالنقط على الخط على بعد 1 ، 2 ، 3 ، ...... من الوحدات على الترتيب على يسار نقطة الأصل.



شكل (1 -2)

يمثل العدد النسبي $\frac{1}{2}$ على هذا التدريج بالنقطة P في منتصف المسافة بين 0 و +1، ويمثل العدد النسبي $\frac{-3}{2}$ بالنقطة R وتبعد $1\frac{1}{2}$ وحدة على يسار نقطة الأصل.

يجب أن تعلم

موضع الأعداد الحقيقية على خط ينشئ ترتيباً لمنظومة الأعداد الحقيقية ، فإذا وقعت النقطة A على يمين نقطة أخرى B على الخط فنقول أن العدد المناظر لـ A أكبر من العدد المناظر لـ B أو أن العدد المناظر لـ B أقل من العدد المناظر لـ A .

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

تعريف(1): لكل عدد حقيقي $a,b,c \in \mathbb{R}$:

(1) $a + b = b + a$

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

(3) إذا كانت $a = b$ فإن $a + c = b + c$ وكذلك $ac = bc$

(4) $a\,b = b\,a$

(5) $a\,(bc) = (a\,b)\,c = a\,b\,c$

(6) $-(-a) = a$ ، $a\,(-b) = -ab$ ، $-a\,(b) = -ab$ ، $(-a)(-b) = ab$

(7) $a\,.\,0 = 0$

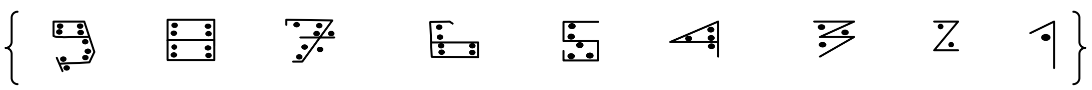
(8) إذا كانت $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$ و العكس صحيح.

(9) $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$

(10) $\frac{0}{a} = 0$ ، $\frac{a}{0}$ غير معروف .

من بديع تراثنا العلمي:

يرجع الفضل بعد الله عز وجل في التعريف بالأرقام الهندية ونشر استعمالها في العالم العربي الإسلامي إلى العالم الفلكي محمد بن إبراهيم الفزاري الكوفي (ت 180) وما لبث علماء العرب و المسلمين أن طوروها حتى وصلت إلى شكلها المعروف حالياً {9,8,7,6,5,4,3,2,1} ولهذا نسمي هذه الأرقام بالأرقام الهندية العربية ، أما الأرقام التي على الصورة { 9,8,7,6,5,4,3,2,1 } فهي عربية وتسمى الغبارية و فكرتها قائمة على عدد الزوايا لكل عدد:



كما تجدر الإشارة هنا إلى أن الصفر بصورتيه الحالية {O ، 0} هو ابتداع عربي إسلامي، وقد طور أحمد الأزدي و المعروف بابن البناء المراكشي (654 – 731) الكسر الاعتيادي و العدد والكسر وأدخل الخط الفاصل بين البسط و المقام ، كما ابتدع أحمد بن إبراهيم الأقليدسي الفاصلة التي تفصل الرقم الصحيح عن الكسر في الكسور العشرية، ويعتبر أبو الريحان البيروني (362 – 440) هو أول من أشار إلى أن π (نسبة محيط الدائرة إلى قطرها) عدد غير نسبي ، وقد أوجد جمشيد الكاشي قيمة π إلى ستة عشر رقماً (3.1459265358979325) ، وقد طور أبو الحسن القلصادي الأندلسي (813 – 891) استعمال الرموز وظهورها على الشكل المعمول به الآن (+ ، - ، X ، ÷).

(1 – 2) العمليات على الأعداد الحقيقية :

لمنع حدوث خطأ و التباس أثناء حل المسائل استخدم عزيزي المتدرب ترتيب العمليات الحسابية التالي:

ترتيب العمليات

1) احسب كل القوى و الجذور.
2) أجر عملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.
3) أجر عملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.

ملاحظات مهمة :

1 ـ إذا كان في المسألة أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً وهو ما يسمى بفك الأقواس.

2 ـ اجر العمليات الموجودة فوق و تحت خط الكسر كلاً على حده.

مثال (1): احسب ما يلي:

I) $9 + 6 - 2$ II) $10 - 23 + 5$ III) $4 - (-7)$ IV) $2 - (7 - 9)$

V) $4 + (16 - 20)$ VI) $3.7 + 5.3 - 9$ VII) $\dfrac{14+3-17}{5-3+1}$

الحل:

I) $9 + 6 - 2 = 15 - 2 = 13$

II) $10 - 23 + 5 = -13 + 5 = -8$

III) $4 - (-7) = 4 + 7 = 11$

IV) $2 - (7 - 9) = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

V) $4 + (16 - 20) = 4 + (-4) = 4 - 4 = 0$

VI) $3.7 + 5.3 - 9 = 9 - 9 = 0$

VII) $\dfrac{14+3-17}{5-3+1} = \dfrac{17-17}{2+1} = \dfrac{0}{3} = 0$

تذكر أن.......!

(1) قاعدة الجمع في الإشارات:

(+) + (+) = (+) ، (-) + (-) = (-)

إشارة الأكبر = (+) + (-)

(2) قاعدة الضرب و القسمة في الإشارات:

$\frac{(+)}{(+)}=(+)$ ، $\frac{(-)}{(-)}=(+)$ ، $\frac{(-)}{(+)}=(-)$

(+) (+) = (+) ، (-) (-) = (+) ، (-) (+) = (-)

مثال (2): احسب ما يلي:

I) 24 ÷ 4x5x8 II) 12x3 ÷ 4 III) 10x6 ÷ 5 ÷ 3 IV) 1.6 x 10 ÷ 4 V) 0.9 ÷ 9

الحل:

I) 24 ÷ 4x5x8 = 6x5x8 = 30x8 = 240

II) 12x3 ÷ 4 = 36 ÷ 4 = 9

III) 10x6 ÷ 5 ÷ 3 = 60 ÷ 5 ÷ 3 = 12 ÷ 3 =4

IV) 1.6 x 10 ÷ 4 = 16 ÷ 4 = 4

V) 0.9 ÷ 9 = 0.1

مثال (3): اجرِ العمليات التالية:

I) 9 + 6 ÷ 3 II) $\frac{1-2(3+4)}{5+6x2}$

الحل:

I) 9 + 6 ÷ 3 = 9 + 2 = 11

II) $\frac{1-2(3+4)}{5+6x2} = \frac{1-2(7)}{5+12} = \frac{1-14}{17} = \frac{-13}{17} = -\frac{13}{17}$

تدريب (1): اجرِ العمليات التالية:

12 + 14 ÷ (11 – 4) x 6 – 16

خصائص الكسور:

تعريف(2): لكل عدد حقيقي a , b , c , d (المقامات غير صفرية).

1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$ ($\Longleftrightarrow$ تعني إذا و إذا فقط أي أن العملية صحيحة من الاتجاهين).

2) $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$

3) $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$

4) $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$

5) $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$

6) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

7) $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

مثال (4): أوجد قيمة مايلي:

I) $\frac{25}{6}+\frac{11}{6}$ II) $\frac{17}{3}-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}$ III) $\frac{7}{11}-\frac{1}{3}$ IV) $-\frac{5}{12}+\frac{7}{4}\times\frac{2}{3}$

V) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ VI) $\frac{1}{3}\div\frac{5}{2}+\frac{9}{2}$ VII) $\frac{5}{7}\div\frac{2}{5}+\frac{-8}{14}$

الحل:

I) $\frac{25}{6}+\frac{11}{6}=\frac{25+11}{6}=\frac{36}{6}=6$

II) $\frac{17}{3}-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=\frac{17-4+7}{3}=\frac{13+7}{3}=\frac{20}{3}$

III) $\frac{7}{11}-\frac{1}{3}=\frac{3(7)-11(1)}{11(3)}=\frac{21-11}{33}=\frac{10}{33}$

IV) $-\frac{5}{12}+\frac{7}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{-5}{12}+\frac{7(2)}{4(3)}=\frac{-5}{12}+\frac{14}{12}=\frac{9}{12}$

V) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{3} \text{x} \dfrac{7}{5} = \dfrac{2(7)}{3(5)} = \dfrac{14}{15}$

VI) $\dfrac{1}{3} \div \dfrac{5}{2} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{1}{3} \text{x} \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{2}{15} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{2(2)+15(9)}{15(2)} = \dfrac{4+135}{30} = \dfrac{139}{30}$

VII) $\dfrac{5}{7} \div \dfrac{2}{5} + \dfrac{-8}{14} = \dfrac{5}{7} \text{x} \dfrac{5}{2} + \dfrac{-8}{14} = \dfrac{5(5)}{7(2)} + \dfrac{-8}{14} = \dfrac{25}{14} + \dfrac{-8}{14} = \dfrac{25+(-8)}{14} \cdot = \dfrac{25-8}{14} = \dfrac{17}{14}$

احــذر.....!

من الأخطاء المشهورة (جمع و طرح البسط مع البسط والمقام مع المقام)

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{4} \neq \frac{3-1}{7-4} = \frac{2}{3}$$

خصائص العدد الصحيح مع كسر :

لكل عدد صحيح a, b, c فإن :

1) $a \pm \frac{c}{b} = \frac{ab \pm c}{b}$　　　2) $a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

3) $a \div \frac{c}{b} = a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$　　　4) $\frac{c}{b} \div a = \frac{c}{b} \times \frac{1}{a} = \frac{c}{ba}$

مثال (5): احسب ما يلي:

I) $4+\frac{2}{5}$　　II) $\frac{10}{15}-1$　　III) $-2x\frac{5}{3}+\frac{1}{3}$

IV) $\frac{7}{4}\div 2\times 5$　　V) $6\div\frac{1}{4}-\frac{11}{2}$　　VI) $2x\frac{5}{11}\div\frac{1}{4}-\frac{17}{11}$

الحــل :

I) $4+\frac{2}{5}=\frac{4}{1}+\frac{2}{5}=\frac{5(4)+1(2)}{1(5)}=\frac{20+2}{5}=\frac{22}{5}$

II) $\frac{10}{15}-1=\frac{10}{15}-\frac{1}{1}=\frac{10(1)-15(1)}{15(1)}=\frac{10-15}{15}=\frac{-5}{15}$

III) $-2\times\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=\frac{-2(5)}{3}+\frac{1}{3}=\frac{-10}{3}+\frac{1}{3}=\frac{-10+1}{3}=-\frac{9}{3}=-3$

IV) $\frac{7}{4}\div 2x5=\frac{7}{4}x\frac{1}{2}x5=\frac{7(1)}{4(2)}x5=\frac{7}{8}x5=\frac{7(5)}{8}=\frac{35}{8}$

V) $6\div\frac{1}{4}-\frac{11}{2}=6x\frac{4}{1}-\frac{11}{2}=\frac{6(4)}{1}-\frac{11}{2}=\frac{24}{1}-\frac{11}{2}=\frac{2(24)-11(1)}{2(1)}=\frac{48-11}{2}=\frac{37}{2}$

VI) $2x\frac{5}{11}\div\frac{1}{4}-\frac{17}{11}=\frac{2(5)}{11}\div\frac{1}{4}-\frac{17}{11}=\frac{10}{11}x\frac{4}{1}-\frac{17}{11}=\frac{40}{11}-\frac{17}{11}=\frac{40-17}{11}=\frac{23}{11}$

مثال (6): إذا كانت $a = \frac{1}{2}$ ، و$b = 2$ فأوجد مايلي:

I) $8a + 18b$ II) $12a - 2b$

الحــل :

I) $8a + 18b = 8\left(\frac{1}{2}\right) + 18(2) = 4 + 36 = 40$

II) $12a - 2b = 12\left(\frac{1}{2}\right) - 2(2) = 6 - 4 = 2$

تدريب (2): أوجد قيمة ما يلي:

I) $\frac{4}{11} \times 3 \div \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$

II) $5 \div \frac{1}{6} - 7 \times \frac{2}{7}$

III) $\frac{2 + \frac{3}{4}}{2}$ IV) $24 \div 2a - b$ ؛ (حيث $a = 3 , b = -5$)

تمارين (1 – 1)

1) احسب ما يلي :

I) $24 \div 4x5x8$ II) $-9+6-5+(-8)$ III) $-6(-4+12x5)$

IV) $\dfrac{15 \div 5x4 \div 6-8}{-6-(-5)-8 \div 2}$ V) $14 \div 2-3x3+1$ VI) $\dfrac{16-8x3 \div 6}{-7+18 \div 9+10}$

VII) $-17+12-6x14 \div 3$ VIII) $18 \div 9x10-10+8x10$

2) اجر العمليات التالية :

I) $\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{2} \div \dfrac{2}{3}$ II) $\dfrac{3}{10}\left(8-\dfrac{1}{7}\right) \div \dfrac{4}{9}$ III) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{7}$

IV) $\dfrac{\frac{2}{4}+\frac{1}{5}}{3}$

3) أوجد العمليات التالية:

I) $5-\dfrac{4}{9}$ II) $6x\dfrac{12}{8}$ III) $\dfrac{1}{6}x\dfrac{5}{4} \div 3$

IV) $11 \div \dfrac{6}{7}x(-2)+20$

4) إذا كانت $a=4$ ، $b=-1$ ، $c=\dfrac{2}{3}$

فأوجد قيمة مايلي:

I) $a+3c$ II) $c-2b$ III) $15-\dfrac{2a-7b}{3}$ IV) $5a \div 2c-3b$

(1 – 3) الأسس :

تعريف: -

لكل عدد طبيعي (n) وعدد حقيقي (a) فإن :

$$a^n = \underbrace{a x a x a x \cdots x a}_{\text{n مره}}$$

العدد الحقيقي(a) يسمى الأساس ، و العدد الطبيعي (n) يسمى الأس.

وكمثال على ذلك :

$$4^3 = 4x4x4 = 64 \quad ، \quad (-6)^2 = (-6)(-6) = 36 \quad ، \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}x\frac{2}{3}x\frac{2}{3}x\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

احذر.....!

من الأخطاء المشهورة ضرب الأساس بالأس

$$2^3 \neq 2(3) = 6$$

مثال (7): اجر العمليات التالية:

I) 4×2^3 II) -2^2 III) $(3+4^2)(3^3-5^2)$

IV) $3 \text{ x } 5^2 - 2^5 + 14$

الحل:

I) $4 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$

II) $-2^2 = -(2^2) \ = -4$

III) $(3+4^2)-(3^3-5^2) = (3+16)(27-25) = (19)(2) = 38$

IV) $3 \text{ x } 5^2 - 2^5 + 14 = 3 \text{ x } 25 - 32 + 14 = 75 - 32 + 14 = 43 + 14 = 57$

احذر.....!

لا تخطئ في حسابك:

$$2(3)^2 \neq (2 \times 3)^2 = 6^2$$

$$-2^2 \neq (-2)^2 = 4$$

قوانين الأسس:

نظرية :

لكل عدد حقيقي a , b وعدد نسبي m , n فإن:

1) $a^n x a^m = a^{n+m}$

2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) $(a^n)^m = a^{nm}$

4) $(axb)^n = a^n x b^n$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq o)$

6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq o)$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a,b \neq o)$

(8) $a^o = 1$ (لماذا..؟)

مثال (8): بسط ما يلي:

I) $3^4 x 3^2$ II) $(-2)^3(-2)^5$ III) $\left(\frac{1}{7}\right)^o$ IV) $\left((-2)^3\right)^4$ V) -7^{-2}

VI) -4^o VII) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ VIII) $\frac{\chi^{\frac{4}{3}}}{\chi^{\frac{1}{3}}}$ IX) $\frac{-5^7}{5^3}$ X) $\left(\frac{\chi}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$

الحل :

I) $3^4 x 3^2 = 3^6$ II) $(-2)^3(-2)^5 = (-2)^8$ III) $(\frac{1}{7})^o = 1$ IV) $\left((-2)^3\right)^4 = (-2)^{12}$

V) $-7^{-2} = -\frac{1}{7^2}$ VI) $-4^o = -1$ VII) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^2}$

VIII) $\frac{\chi^{\frac{4}{3}}}{\chi^{\frac{1}{3}}} = \chi^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = \chi^{\frac{3}{3}} = \chi$ IX) $\frac{-5^7}{5^3} = -5^4$ X) $\left(\frac{\chi}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)^{10} = \frac{\chi^{10}}{\left(\gamma^{\frac{1}{2}}\right)^{10}} = \frac{\chi^{10}}{\gamma^5}$

مثال (9): بسط العبارات الرياضية التالية مستخدماً القوة الموجبة فقط باعتبار أن المتغيرات لا تساوي الصفر.

I) $\left(6y^{\frac{2}{3}}\right)\left(2y^{\frac{1}{2}}\right)$ II) $3\chi^{-2}(4^{-1}\chi^{-5})^{2}$ III) $\dfrac{10\kappa^{-3}}{5\kappa^{-5}}$

IV) $(-z^{2r})(4z^{r+3})$ V) $(-5\kappa)^{-2}$

الحل:

I) $\left(6y^{\frac{2}{3}}\right)\left(2y^{\frac{1}{2}}\right)=12y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=12y^{\frac{4+3}{6}}=12y^{\frac{7}{6}}$

II) $3\chi^{-2}(4^{-1}\chi^{-5})^{2}=3\chi^{-2}(4^{-2}\chi^{-10})=3x4^{-2}\chi^{-2+(-10)}$

$$=3x4^{-2}\chi^{-12}=3x\frac{1}{4^{2}}x\frac{1}{\chi^{12}}=\frac{3}{16\chi^{12}}$$

III) $\dfrac{10\kappa^{-3}}{5\kappa^{-5}}=2\kappa^{-3-(-5)}=2\kappa^{2}$ IV) $(-Z^{2r})(4Z^{r+3})=-4Z^{3r+3}$

V) $(-5\kappa)^{-2}=\dfrac{1}{(-5\kappa)^{2}}=\dfrac{1}{(-5)^{2}\kappa^{2}}=\dfrac{1}{25\kappa^{2}}$

مثال (10): إذا كانت $a = 5$, $b = 1$, $c = 10$ فأوجد :

I) $(2a)^{2}$ II) $(c+3b)^{2}$

الحل:

I) $(2a)^{2}\ (2(5))^{2}=(10)^{2}=100$

II) $(c+3b)^{2}=(10+3(1))^{2}=(10+3)^{2}=(13)^{2}=169$

انتبـه.....!

الأسس لا تتوزع على عمليتي الجمع والطرح $(a\pm b)^{n}\neq a^{n}\pm b^{n}$

تدريب (3): 1 -أوجد قيمة $2a^2 \div 5b^3 - 5$ حيث $a = 10 , b = 2$

2 -اختصر ما يأتي لأبسط صورة:

I) $5^6(5^{-3})(5^4)$ II) $\dfrac{(5\chi)^{-2}(\chi^{-3})^{-4}}{(25^{-1}\chi^{-3)})^{-1}}$

تمارين (1 – 2)

1) ميز العبارات الصحيحة و الخاطئة و بين السبب.

I) $a^n \cdot b^m = (ab)^{n+m}$ II) $a^n \cdot a^m \cdot a^r = a^{n+m+r}$ III) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

IV) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ V) $\dfrac{a^4}{a^2+b^4} = \dfrac{a^2}{b^4}$

2) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

I) $2a^{-1} =$

1) $\dfrac{1}{2a}$ 2) $\dfrac{-2}{a}$ 3) $-2a$ 4) $\dfrac{2}{a}$

II) $(3b)^{-2} =$

1) $\dfrac{1}{9b^2}$ 2) $\dfrac{1}{6b^2}$ 3) $\dfrac{9}{b^2}$ 4) $\dfrac{-6}{b^2}$

III) $5a^{-1}b^2 =$

1) $5ab$ 2) $\dfrac{b^2}{5a}$ 3) $\dfrac{-5b^2}{a}$ 4) $\dfrac{5b^2}{a}$

IV) $(\dfrac{-2a^{-1}}{b})^3 =$

1) $\dfrac{6a^3}{b^3}$ 2) $\dfrac{-8b^3}{a^3}$ 3) $\dfrac{-8}{a^3b^3}$ 4) $\dfrac{-6}{a^3b^3}$

3) أوجد قيمة ما يلي :

I) -2^4 II) $(-2)^4$ III) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$ IV) $4a^4 - b^2 \div 2$, $(a = 2 , b = 4)$

IV) $\dfrac{a^3}{a - b4b^2}$, $(a = 4 , b = 3)$

4) بسط العبارات الرياضية التالية (اكتب الجواب النهائي بالقوة الموجبة فقط).

I) $(4^3)(2^{-6})(2^{10})$ II) $\dfrac{(t^5)(t^{-3})}{t^{-7}}$ III) $(m+7)^{-\frac{1}{6}}(m+7)^{-\frac{2}{3}}$

IV) $5P^r(6P^{3-2r})$ V) $(2\gamma^{\frac{3}{4}}Z)(3\gamma^{\frac{1}{4}}Z^{-\frac{1}{3}})$ VI) $\dfrac{(3\chi^n)^3}{(\chi^2)^{n-1}}$

VII) $(\chi^{\frac{2}{3}})(\chi^{\frac{1}{2}})(\chi^{\frac{4}{3}})$ VIII) $\dfrac{\chi^5}{\gamma^{-2}} \div \dfrac{\chi^{-3}}{\gamma^4}$

(1 -4) الجذور:

تعريف:

إذا كان a عدداً حقيقياً ، n عدداً صحيحاً موجباً و $a^{\frac{1}{n}}$ عدداً حقيقياً فإن

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

ملاحظات :

(1) من المتعارف عليه عند الرياضيين أنه لا يكتب الرقم 2 للدلالة على الجذر الثاني (التربيعي) بل يكتفى بكتابة الجذر فقط $\sqrt{a}$.

(2)

n	$a>0$	$a<0$	$a=0$
زوجي	$\sqrt[n]{a}$ هي عدد حقيقي موجب بحيث $(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a}$ غير معروف	$\sqrt[n]{a}=0$
فردي	$\sqrt[n]{a}$ هي عدد حقيقي بحيث $(\sqrt[n]{a})^n = a$		$\sqrt[n]{a}=0$

مثال (11): أوجد قيمة ما يلي في $\mathbb{R}$:

I) $\sqrt[3]{1000}$ II) $\sqrt[5]{-32}$ III) $\sqrt{(-5)^2}$ IV) $\sqrt{-4}$ V) $-\sqrt[4]{16}$

الحل :

I) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$ II) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

III) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ IV) $\sqrt{-4}$ غير معروف

V) $-\sqrt[4]{16} = -\sqrt[4]{2^4} = -2$

قوانين الجذور:

لكل عدد حقيقي a، b و عدد صحيح موجب n , m فإن:

1) $\sqrt[n]{a}x\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

2) $b\neq o$ $\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

4) $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m=a^{\frac{m}{n}}$

مثال (12): احسب كلاً مما يلي:

I) $\sqrt{49}$ II) $\sqrt{16\times 9}$ III) $\sqrt{64x5}$ IV) $\sqrt{12}x\sqrt{3}$ V) $\sqrt{\dfrac{20}{3}}x\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

VI) $4\sqrt{2}-\sqrt{2}$ VII) $\sqrt[3]{(27)^4}$ VIII) $4\sqrt{81}\div 12+5$ IX) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

الحل :

I) $\sqrt{49}=7$ II) $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=25$ III) $\sqrt{64x5}=\sqrt{64}x\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

IV)) $\sqrt{12}x\sqrt{3}=\sqrt{12(3)}=\sqrt{36}=6$

V) $\sqrt{\dfrac{20}{3}}x\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\sqrt{\dfrac{20(5)}{3(3)}}=\sqrt{\dfrac{100}{9}}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}}=\dfrac{10}{3}$

VI) $4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ VII) $\sqrt[3]{(27)^4}=(\sqrt[3]{27})^4=(3)^4=81$

VIII) $4\sqrt{81}\div 12+5=4(9)\div 12+5=36\div 12+5=3+5=8$

IX) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=2$

انتبـه.....!

الجذور لا تتوزع على الجمع و الطرح

$\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$

مثال (13): بسط كلاً مما يأتي (مع العلم أن المتغيرات غير سالبة ولا تساوي الصفر).

I) $4\sqrt{3}-5\sqrt{12}+3\sqrt{75}$ II) $\sqrt{72\chi^3\gamma}$

III) $\sqrt{\dfrac{\chi^3\gamma^5}{\gamma^3}}$

الحل :

I) $4\sqrt{3}-5\sqrt{12}+3\sqrt{75}=4\sqrt{3}-5\sqrt{4(3)}+3\sqrt{25(3)}$

$=4\sqrt{3}-5(2)\sqrt{3}+3(5)\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}-10\sqrt{3}+15\sqrt{3}$

$=9\sqrt{3}$

II) $\sqrt{72\chi^3\gamma}=\sqrt{36(2)\chi^2\chi\gamma}=\sqrt{36\chi^2}\sqrt{2\chi\gamma}=6\chi\sqrt{2\chi\gamma}$

III) $\sqrt{\dfrac{\chi^3\gamma^5}{\gamma^3}}=\sqrt{\chi^3\gamma^{5-3}}=\sqrt{\chi^2\gamma^2\chi}=\chi\gamma\sqrt{\chi}$

تدريب (4):

1) أوجد قيمة $3\sqrt{64}\div 4$

2) بسط العبارة التالية:

$2\sqrt{5}-3\sqrt{20}+2\sqrt{45}$

تمارين (1 – 3)

1) أوجد قيمة ما يلي :

I) $(\sqrt{3})^3$ II) $\sqrt{81}$ III) $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$ IV) $(3\sqrt{2})^2$

V) $\sqrt[4]{(81)^3}$ VI) $\sqrt{\sqrt{81}}$

2) اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة: ($\chi > 0$ ، $\gamma > 0$ ، $Z > 0$) .

I) $-\sqrt[3]{\dfrac{\chi^5\gamma^3Z^2}{8}}$ II) $\sqrt[3]{2\gamma^2\chi} \times \sqrt[3]{4\gamma^4\chi^2}$ III) $\dfrac{\sqrt{\chi^3\gamma^5} \times \sqrt{\chi^2\gamma^6}}{\sqrt{\chi^3\gamma^7}}$

IV) $\sqrt{\chi^7\gamma^3} - 3\sqrt{\chi^7\gamma^3} + \sqrt{\chi^7\gamma^3}$

1 -5) النسبة المئوية:

النسبة المئوية هي عدد الأجزاء في كل مئه ، أي أن قيمة النسبة المئوية مساوية لمقدار البسط لكسر مقامه 100

فمثلاً
$$15\,\% = \frac{15}{100}$$

تسمى 15 % نسبة مئوية وتقرأ 15 بالمئه (أشارة النسبة المئوية هي %).

ويمكن كتابة النسبة المئويه بصورة كسر عادي مقامه 100

فمثلاً
$$37\,\% = \frac{37}{100}$$

كما يمكن كتابة النسبة المئوية بصورة كسر عشري

فمثلاً
$$26\,\% = \frac{26}{100} = 0.26$$

مثال (14):

حول النسب المئويه التالية إلى كسور عاديه ثم كسور عشريه:

I) 70 %　　II) 36 %　　III) 5 %　　IV) 82 %　　V) 163 %

الحل :

I) $70\,\% = \frac{70}{100} = 0.70$

II) $36\,\% = \frac{36}{100} = 0.36$

III) $5\,\% = \frac{5}{100} = 0.05$

IV) $82\,\% = \frac{82}{100} = 0.82$

V) $163\,\% = \frac{163}{100} = 1.63$

مثال (15):

اوجد ما يلي :

I) 120 cm من 50 %

II) 10 g من 11 %

III) 50 sec من 44 %

IV) 2 L_1 من 18 %

V) 80 Kg من 75 %

VI) 50 Km من 12 %

VII) 200 r.s من 150 %

الحل : نضرب النسبة المئوية بعد تحويلها إلى كسر عشري بالمقدار المعطى

I) $50\ \% = 0.50 \Rightarrow 0.50 \times 120 = 60$ cm

II) $11\ \% = 0.11 \Rightarrow 0.11 \times 10 = 1.1$ g

III) $44\ \% = 0.44 \Rightarrow 0.44 \times 50 = 22$ sec

IV) $18\ \% = 0.18 \Rightarrow 0.18 \times 2 = 0.36$ L

V) $75\ \% = 0.75 \Rightarrow 0.75 \times 80` = 60$ Kg

VI) $12\ \% = 0.12 \Rightarrow 0.12 \times 50 = 6$ Km

VII) $15\ \% = 1.5 \Rightarrow 1.5 \times 200 = 300$ r.s

مثال (16):

أقرت حكومة المملكة العربية السعودية زيادة مقدارها 15% في رواتب موظفي الدولة ابتداء من شهر رمضان عام 1426 هـ فإذا كان الراتب الأساسي لأحد الموظفين هو 6280 ريالاً فأوجد :

أ - مقدار الزيادة في راتب هذا الموظف.

ب - راتب هذا الموظف بعد الزيادة.

الحل :

ريالاً سعودياً 6280الراتب الأساسي $15\ \% = 0.15$,

أ -لإيجاد مقدار الزيادة نضرب النسبة المئويه في الراتب الأساسي:

$942 = 0.15 \times 6280$ ريالاً سعودياً

ب -راتب هذا الموظف بعد الزيادة:

942 + 6280 = 7222 ريالاً سعودياً

مثال (17):

أوجد النسبة المئوية في كل مايلي:

I) 20 ريالاً من 40 ريالاً

II) 3 أيام من 4 أيام

III) 15 دقيقة من 50 دقيقة

IV) 12 كيلوغرام من 60 كيلوغرام

الحل : لإيجاد النسبة المئوية نقسم المقدار المراد إيجاد نسبة على المقدار الكلي ثم نضرب الناتج في مئه

I) $\frac{20}{40}$ x 100 = 0.5 x 100 = 50 %

II) $\frac{3}{4}$ x 100 = 0.75 x 100 = 75 %

III) $\frac{15}{50}$ x 100 = 0.3 x 100 = 30 %

IV) $\frac{12}{60}$ x 100 = 0.2 x 100 = 20 %

مثال (18):

حصل أحد المتدربين في المعهد الملكي المهني الصناعي على ما مجموعة 270 درجة من أصل 300 درجة، وذلك في الفترة الرابعة من برنامج الكهرباء، أوجد النسبة المئوية التي تحصل عليها المتدرب في تلك الفترة.

الحل:

مجموع الدرجات المكتسبة 270 درجة

المجموع الكلي للدرجات 300 درجة

النسبة المئوية= $\frac{\text{مجموع الدرجات المكتسبة}}{\text{المجمع الكلي}}$ X 100

$$\Rightarrow \frac{270}{300}\times 100 = 0.9\times 100 = 90\%$$

تدريب (4):

أقام أحد المحلات التجارية تخفيضات بمقدار 40 % ، فإذا كانت قيمة إحدى السلع قبل التخفيض 185 ريالاً فأوجد:

أ -مقدار النقص في قيمة السلع.

ب -قيمة السلعة بعد التخفيض.

تمارين (1 – 4)

1) اكتب النسب المئوية الآتية على صورة كسر عشري:

I) 51 %　II) 97 %　III) 10 %　IV) 250 %　V) 7 %

VI) 152 %　VII) 100 %　VIII) 111 %

2) اوجد قيمة مايلي:

I) 100 Kg من 60 %　II) 10 m من 17 %　III) 730 r.s من 115 %

III) 12 Km من 5 %

3) حصل أحد المتدربين في اختبار الرياضيات على 72 % وكانت الدرجة العليا للاختبار 75 درجة ، كم عدد الدرجات التي تحصل عليها المتدرب ؟

4) لدى أحدى الورش 40 بطارية سيارة ، تلف منها 15 %، وكان لابد من التخلص من البطاريات التالفة ، كم عدد البطاريات التي تم التخلص منها ؟

5) قامت الإدارة العامة للمناهج في المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني بتزويد أحد المعاهد المهنية الصناعية بـ5280 كتاباً ، 35 % منها كتب مواد عامة ، اوجد:

أ -نسبة الكتب التخصصية.

ب -عدد كتب المواد العامة.

6) أوجد النسبة المئوية في كل ممايلي:

I) 7 دقائق من 28 دقيقة
II) 20 حاسباً آلياً من 50 حاسباً آلياً
III) 120 متدرباً من 600 متدرب
IV) 137 ريالاً من 1000 ريال
V) 30 طرمبة زيت من 120 طرمبة زيت
VI) 12 ترانزستور من 20 ترانزستوراً

7) لدى خالد ثمانية أقلام جافه ، لكن اثنين منها في حالة جيدة:

أ -كم نسبة الأقلام الصالحة للاستخدام؟

ب -كم نسبة الأقلام غير الصالحة للاستخدام؟

8) المسافة من الرياض إلى الخرج 80 Km ، أحمد وعصام وسامي قادوا دراجاتهم من الرياض باتجاه الخرج ، أحمد قطع بدراجته 40 Km ثم توقف ، أما عصام فأستطاع أن يقطع 60 Km قبل أن يتوقف ، ولكن سامي أنهى الطريق بكامله متجهاً نحو الخرج.

أ -كم نسبة المسافة التي قطعها الدراج أحمد؟

ب -كم نسبة المسافة التي قطعها الدراج عصام؟

ج -كم نسبة المسافة التي قطعها الدراج سامي؟

9) اشترى عبدالله كمية من أسهم إحدى الشركات بسعر 85 ريالاً للسهم وبعد ستة أشهر باع عبدالله أسهمه بسعر 212.5 ريالاً للسهم ، أوجد نسبة الارتفاع في قيمة السهم لهذه الشركة .

(1 -6) كثيرات الحدود :

كثيرة الحدود هي نوع خاص من الدوال (التطبيقات) لكنها جمة الاستخدام في مجالات الرياضيات المختلفة بل في مسائل غير محدودة تنشأ من ظروف الحياة العامة.

إنَّ هذا النوع الخاص من الدوال يتمتع بالمرونة الكافية ليفي بشروط قلما تتحقق في الدوال عموماً ، لهذا فهي أمثلة جيدة سهلة التعامل واضحة المعالم وبخاصة في نظرية المعادلات.

الحد:

يحتوي على حاصل ضرب أعداد وحروف مثل $3x$ ، و $4x^2y$ ، أحادي الحد هو مقدار جبري يحتوي على حد واحد فقط ، وكثيرة الحدود تحتوي على أكثر من حد واحد ، ويرمز لكثيرة الحدود بالرمز $f_{(x)}$ أو $h_{(x)}$ أو $g_{(x)}$ ....

الدرجة :

درجة أحادي الحد هي مجموع كل الأسس للمتغيرات في الحد ، فمثلا درجة الحد $6x^5$ هي 5 ودرجة الحد $4x^2y$ هي $3 = 1 + 2$ ، ودرجة كثيرة الحدود هي نفسها درجة الحد ذي الدرجة الأكبر.

لاحظ أن أسس المتغير في كل كثيرات الحدود هي أعداد صحيحة غير سالبه ، وعليه فلو احتوت الدالة حداً من الشكل x^{-1} أو من الشكل $x^{\frac{1}{2}}$ مثلاً فإن ذلك كاف لإخراج هذه الدالة من كثيرات الحدود.

الحدود المتشابهة :

الحدود التي تحتوي نفس المتغير بنفس الأس مثل $5x^3$ و $8x^3$

تعريف :

تكتب دالة كثيرة الحدود من الدرجة n على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 , a_n \neq 0$$

تسمى الأعداد $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ بمعاملات دالة كثيرة الحدود ، كما يسمى a_n بالمعامل الرئيس ، a_0 بالحد الثابت

مثال(19):

لتكن $f(x)=3x^5-2x^4+x^2+7x$

اكتب درجة ومعاملات $f(x)$ وأوجد كلاً من المعامل الرئيس والحد الثابت فيها

الحل:

درجة $f(x)$ هي 5

المعاملات $a_3=0$ ، $a_4=-2$ ، $a_5=3$

$a_0=0$ ، $a_1=7$ ، $a_2=1$

المعامل الرئيس $a_5=3$ الحد الثابت $a_0=0$

بعض خصائص كثيرات الحدود:

أ -كثيرة الحدود الصفرية:

تعريف:

كثيرة الحدود الصفرية $f(x)=0$ لجميع قيم $x\in\mathbb{R}$

ويرمز لها بالرمز $f_0(x)$

ب -تساوي كثيرتي حدود

تعريف:

إذا كانت $f_1(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...........+a_1x+a_0$

$f_2(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...........+b_1x+b_0$

كثيرتي حدود فإن $f_1(x)=f_2(x)$ إذا تحقق الشرطان التاليان

(1) $n=m$ أي أن لهما نفس الدرجة.

(2) $a_n=b_n, a_{n-1}=b_{n-1},.........a_1=b_1, a_0=b_0$ أي أن المعاملات المتناظرة فيهما متساوية

مثال(20):

إذا كانت $f_1(x) = px^5 + 2x^3 - x^2 + 3$ ، $f_2(x) = 4x^5 + 2x^3 + qx^2 + 3$

فأوجد قيمة كلاً p، q من التي تجعل $f_2(x)$ ، $f_1(x)$ متساويتين.

الحل:

لكي يكون $f_1(x) = f_2(x)$ فيجب أن تكون:

$$P = 4 \quad ، \quad q = -1$$

ج -ضرب كثيرة الحدود بعدد حقيقي:

تعريف:

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_1 x + a_0$

حيث $a_n \neq 0$ وكانت $K \in \mathbb{R}$ فإن

$$kf(x) = ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + ka_1 x + ka_0$$

أي أن العدد يضرب بجميع معاملات كثيرة الحدود.

مثال(21):

إذا كانت $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x + 4$ فأوجد $3f(x)$

الحل:

$$3f(x) = 3(3x^4 - 2x^3 - x + 4)$$
$$= 3(3)x^4 - 3(2)x^3 - 3(1)x + 3(4)$$
$$= 9x^4 - 6x^3 - 3x + 12$$

د -جمع وطرح كثيرات الحدود:

تعريف:
إذا كانت $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ كثيرتي حدود فإن $f_1(x)\pm f_2(x)$ هي كثيرة حدود أيضاً ، ويتم جمع (أو طرح) كثيرات الحدود بجمع (أو طرح) معاملات الحدود المتشابهة، أما معاملات الحدود غير المتشابهة فتظل كما هي في كل من $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ وتكون درجة $f_1(x)\pm f_2(x)$ هي أعلى درجة في $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ على الأكثر.

مثال(22):

إذا كانت $f_1(x)=2x^4-4x^3-x+5$ ، $f_2(x)=3x^3-x^2+2x+4$ فأوجد

I) $f_1(x)+f_2(x)$ II) $f_1(x)-f_2(x)$

الحل:

$$f_1(x)+f_2(x)=(2x^4-4x^3-x+5)+(3x^3-x^2+2x+4)$$
$$=2x^4+(4+3)x^3-x^2+(-1+2)x+(5+4)$$
$$=2x^4+7x^3-x^2+x+9$$
$$f_1(x)-f_2(x)=(2x^4+4x^3-x+5)-(3x^3-x^2+2x+4)$$
$$=2x^4+(4-3)x^3-(-1)x^2+(-1-2)x+(5-4)$$
$$=2x^4+x^3+x^2-3x+1$$

في عملية الجمع والطرح رتب كثيرة الحدود الناتجة حسب الأس تنازلياً.

تذكر......!
قواعد الإشارات في الجمع والطرح والضرب والقسمة والتي كررناها في بند (1 -2)

ملاحظات:

أ -يمكن كتابة العبارة الرياضية $f_1(x)\pm f_2(x)$ اختصاراً على الصورة $(f_1\pm f_2)(x)$

ب- إذا كانت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$ حيث $a_n\neq 0$ وكانت $b\in\mathbb{R}$
فإن $f(b)=a_n(b)^n+a_{n-1}b^{n-1}+....+a_1b+a_0$

مثال (23):

إذا كانت $f_2(x)=3x^4+2x^3-x+4$ ، $f_1(x)=2x^3+4x+3$

فأوجد :

I) $(3f_1-2f_2)(x)$ II) $(f_1+f_2)(1)$

الحل:

$$\text{I) } (3f_1-2f_2)(x)=3(2x^3+4x+3)-2(3x^4+2x^3-x+4)$$
$$=(6x^3+12x+9)+(-6x^4-4x^3+2x-8)$$
$$=-6x^4+(6-4)x^3+(12+2)x+(9-8)$$
$$=-6x^4+2x^3+14x+1$$

II) $(f_1+f_2)(1)$

نوجد أولا $(f_1+f_2)(x)$

$$(f_1+f_2)(x)=(2x^3+4x+3)+(3x^4+2x^3-x+4)$$
$$=3x^4+(2+2)x^3+(4-1)x+(3+4)$$
$$=3x^4+4x^3+3x+7$$

ثانيا نعوض عن قيمة (x) بـ (1) فتكون

$$(f_1+f_2)(1)=3(1)^4+4(1)^3+3(1)+7$$
$$=3+4+3+7=17$$

يمكن حل هذه الفقرة بطريقة أخرى وذلك بالتعويض بـ (1) في كلا الدالتين ثم نجمع ناتج التعويض.

انتبه......!

$$a^n\neq a(n)$$

$$f(b)\neq bf(x)$$

تدريب (5):

1 -إذا كانت $f_1(x) = 6x^6 + 13x^3 + x^2 + 2$ ، $f_2(x) = 6x^6 - px^3 + qx^2 + r$ فأوجد قيمة r ,q , p

2 -إذا كانت $f_1(x) = 2x^3 + 4x + 3$ ، $f_2(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 4$ فأوجد $4(f_1(x) + f_2(x))$.

د -ضرب كثيرات الحدود:

تعريف:

إذا كانت $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ كثيرتي حدود غير صفريتين درجتيهما **n , m** على التوالي فإن حاصل ضربهما $f_1 . f_2$ هي دالة كثيرة حدود درجتها **n+m**

وتتم عملية الضرب بضرب كل حد من f_1 بجميع حدود f_2 مع مراعاة ضرب العوامل وجمع الأسس ، ثم تجمع الحدود المتشابهة.

مثال(24):

إذا كانت $f_1(x) = x + 2$ ، $f_2(x) = x^2 + x + 2$

فأوجد $(f_1.f_2)(x)$ ، مع ذكر درجتها.

الحل:

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = (x+2)(x^2+x+2) = x(x^2+x+2) + 2(x^2+x+2)$$
$$= x^3 + x^2 + 2x + 2x^2 + 2x + 4$$
$$= x^3 + 3x^2 + 4x + 4$$

درجة $(f_1 \cdot f_2)(x)$ هي 3(درجة f_1 + درجة f_2)

تذكر......!

في الضرب نجمع الأسس

مثال (25):

إذا كانت $f_1(x)=3x^4+2x-1$ ، $f_2(x)=2x^2+3$ ، $f_3(x)=x^3+2x^2$

فأوجد $((f_3-f_2)f_1)$ (-1).

الحل:

نوجد أولا $((f_3-f_2)f_1)$ (x)

$$\begin{aligned}((f_3-f_2)f_1)(x) &= ((x^3+2x^2)-(2x^2+3))(3x^4+2x-1)\\ & (x^3+2x^2-2x^2-3)(3x^4+2x-1)\\ &=(x^3-3)(3x^4+2x-1)\\ &=x^3(3x^4+2x-1)+(-3)(3x^4+2x-1)\\ &=3x^7+2x^4-x^3+(-9x^4-6x+3)\\ &=3x^7+(2-9)x^4-x^3-6x+3\\ &=3x^7-7x^4-x^3-6x+3\end{aligned}$$

نعوض عن قيمة x بـ (-1)

$$\begin{aligned}((f_3-f_2)f_1)(-1) &= 3(-1)^7-7(-1)^4-(-1)^3-6(-1)+3\\ &=3(-1)-7(1)-(-1)+6+3\\ &=-3-7+1+6+3\\ &=0\end{aligned}$$

تذكر......!

الأسس الفردية تحافظ على أشارة السالب للأساس والأسس الزوجية تحول إشارة الأساس السالبة إلى موجبة.

هـ -قسمة كثيرات الحدود:

تعريف:

لتكن $h(x), f(x)$ كثيرتي حدود بحيث أن $h(x) \neq f_0(x)$ ودرجة $h(x) \le$ درجة $f(x)$

فإنه يوجد كثيرتا حدود $r(x), q(x)$ بحيث $f(x) = h(x).q(x) + r(x)$

وتكون $r(x)$ إما تساوي $f_0(x)$ أو أن درجة $r(x) <$ درجة $h(x)$ نسمى $q(x)$ خارج

$r(x)$

مثال (26):

أقسم $f(x) = x^2 - 5x + 6$ على $h(x) = x - 2$

الحل:

باستخدام القسمة المطولة

1 -نقسم الحد الأول من f(x) على الحد الأول من h(x)

2 -نضرب الناتج من(1) في جميع حدود h(x)

3 -نطرح الحدود المتشابهة ونضيف الحدود غير المتشابهة

4 -نكرر الخطوات 1و2و3 حتى تنتهي عملية القسمة.

$$\frac{x^2}{x} \qquad \frac{-3x}{x}$$

$$x - 3$$

$$h(x) \longrightarrow x - 2 \;\Big|\; x^2 - 5x + 6 \longleftarrow f(x)$$

$$x(x-2) = \longrightarrow x^2 - 2x$$

$$(x^2 - 5x + 6) - (x^2 - 2x) \longrightarrow -3x + 6$$

$$-3(x-2) \longrightarrow -3x + 6$$

$$(-3x+6) - (-3x+6) \longrightarrow 0 \quad 0$$

$\Rightarrow$ ناتج القسمة هو $(x-3)$

تذكر......!

في القسمة نطرح الأسس

مثال (27):

لتكن $f(x)=2x^3-x^2+5x-3$ ، $h(x)=x^2+1$

أوجد خارج وباقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$.

الحل:

$$\frac{2x^3}{x^2} \qquad \frac{-x^2}{x}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \quad 2x-1 \longleftarrow \text{خارج القسمة } q(x) \\
x^2+1 & \overline{\big)\, 2x^3-x^2+5x-3} \\
2x(x^2+1) \longrightarrow & \underline{2x^3 \qquad\quad +2x} \\
(2x^3-x^2+5x-3)-(2x^3+2x) \longrightarrow & \quad -x^2+3x-3 \\
-1(x^2+1) \longrightarrow & \quad \underline{-x^2 \qquad -1} \\
(-x^2+3x-3)-(-x^2-1) \longrightarrow & \quad 3x-2 \longleftarrow \text{الباقي } r(x)
\end{array}$$

خارج القسمة $q(x)=2x-1$ الباقي $r(x)=3x-2$

تدريب (6):

لتكن $f(x)=8x^2-10x+8$ ، $h(x)=2x-4$ أوجد

أ - $f(x)\cdot h(x)$.

ب -خارج وباقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$.

تمارين (1 -5)

1) إذا كانت $f_1(x) = 13x^5 - 2x^4 + px^2 - 6$ ، $f_2(x) = 13x^5 - qx^4 - 17x^2 + r$ متساويتين فأوجد قيمة كلاً من r , q , p .

2) اجر العمليات التالية:

I) $(5x^4 - 2x^2 + x) + (3x^3 + x^2 - 4x)$

II) $(6x^3 + 2x^2 - 5x + 1) - 2(-x^3 - x^2 - 4)$

III) $\frac{1}{2}(4x^5 + 8x^3 - 3) + 4(x^5 + 2x^2 - 1)$

IV) $(x^3 - 3x) + 2(x^2 + 2x - \frac{1}{2}) + (4x^3 - 3)$

V) $(3x - 5)(2x + 1)$

VI) $4x^2(3x^3 + 2x^2 - 5x + 1)$

VII) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

VIII) $(4x + 2y)^2$

IX) $(3x + 2)^3$

X) $(3x^2 - 2)(3x^2 + 2)$

3) أوجد خارج وباقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$

I) $f(x) = 10x^8 - 16x^6 - 4x^4 \quad ; \quad h(x) = 2x^6$

II) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2x + 5 \quad ; \quad h(x) = x^2 + 1$

III) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 9x - 5 \quad ; \quad h(x) = 3x + 3$

IV) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x + 10 \quad ; \quad h(x) = 2x - 1$

تمارين عامة

1) أوجد قيمة ما يلي :

I) $21 \div 7 - 4$ II) $15x\frac{2}{3} \div 5 \div \frac{1}{2}$ III) $\dfrac{-4^2 + 3x5 + 7}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$

IV) $\frac{5}{6}(7x2 - 2) \div 5$ V) $\frac{3}{4} \div 5 + \frac{13}{20} - \frac{16}{20}$ VI) $12 \div \frac{3}{7}x(-3) + 54$

VII) $\dfrac{5x2^3 \div 10}{13 - 3^2}$ VIII) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$

2) ميز العبارات الصحيحة و الخاطئة فيما يلي مع تصحيح الخطأ:

I)$(2\sqrt{5})^2 = 2(5)$ II)$16 \div 4 - 2 = 8$ III)$-3^4 = 81$ IV)$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{6}{5}$

V) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$ VI) $(-2)^3 = -8$ VII) $(\chi^5)(\chi^2) = \chi^{10}$

VIII) $-4^2 = -8$ IX) $5\chi - 2\chi = 3$ X) $10\gamma + 2\gamma = 12\gamma^2$

3) اختصر ما يلي إلى أبسط صورة ، علماً بأن جميع المتغيرات غير سالبة ولا تساوي صفراً.

I) $(\chi-1)^{1/4}(\chi-1)^2(\chi-1)^{-1}$ II) $\dfrac{(5)^{10}(5)^4}{(5)^{12}}$ III) $-\sqrt[4]{\dfrac{\chi^8\gamma^{17}}{16}}$ $\sqrt{2} X \sqrt{8}$

IV) $\dfrac{\chi^4}{\gamma^3} \div \dfrac{\chi^{-1}}{\gamma^4}$ V) $11\chi^{3r}(2\chi^{2-3r})$ VI) $\sqrt{\chi^4\gamma^3} + 2\sqrt{9\chi^4\gamma^3}$

VII) $\dfrac{\sqrt[3]{\chi^6\gamma^{-2}Z} \ x \ \sqrt[3]{\chi\gamma^9 Z^2}}{\sqrt[3]{\chi^4\gamma}}$

4) أوجد قيمة ما يلي:

I) $\left(\sqrt[3]{-1}\right)^3$ II) $(-3)^4$ III) $\left(2\sqrt{7}\right)^2$ IV) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$

V) $\sqrt{16} \times \sqrt{4}$ VI)$4\left(3\sqrt{2}\right)$ VII) $5\sqrt[3]{64} \div 2^2 - 6$

5) أوجد قيمة مايلي:

I) % 16 من 100 Kg   II) % 70 من 24 ساعة

III) % 7 من 200 متدرب   IV) % 125 من 940 ريالاً

6) ارتفعت مكافأة متدربي السنة الأولى بمقدار 44 ريالاً ،اعطوا من الزيادة % 75 لصالح الجمعيات الخيرية ، بكم تبرع كل متدرب ؟:

7) أوجد النسبة المئوية في كل ممايلي:

I) 40 لوحة رسم من 160 لوحة رسم   II) 15 كتاباً من 105 كتب

III) 71 آلة حاسبة من 51 آلة حاسبة   IV) 15 فيشاً من 50 فيشاً

7) قام المعهد الملكي بتركيب 80 مكيفاً وبعد مرور 9 أشهر تعطل منها 16 مكيفاً أوجد:

أ -نسبة المكيفات المتعطلة ؟

ب -نسبة المكيفات الجيدة ؟

8) أتمم العمليات الآتية:

I) $\left(6x^3+2x^3-5x+1\right)-\left(-x^3-x^2+4\right)+\left(3x^2+2\right)$

II) $4(2x^6-\frac{1}{2}x^3+2x-1)-\left(5x^6-x^5+2x^3+8x\right)$

III) $\left(3x^3+1\right)\left(4x^2-2x+1\right)$

IV) $\left(5x+2\right)\left(5x-2\right)$

V) $\left(4x-3\right)^2$

9) أوجد خارج وباقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ في كل مما يلي:

I) $f(x)=6x^3+7x^2-4x+2$ ؛ $h(x)=3x+2$

II) $f(x)=-4x^7-14x^6+10x^4-14x^2$ ؛ $h(x)=-2x^2$

III) $f(x)=4x^4+2x^3+6x-1$ ؛ $f(x)=2x^2+1$